

4.2.3 对数函数的性质与图像

情境与问题

我们已经知道, 假设有机体生存时碳 14 的含量为 1, 那么有机体死亡 x 年后体内碳 14 的含量 y 满足

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}},$$

也就是说, y 是 x 的函数.

在得到古生物的样品时, 考古学家能够测量出其中的碳 14 含量 y , 你认为考古学家们能利用这个值推断出古生物的死亡时间 x 吗? 给定一个 y 值, 有多少个 x 值与之对应? 这里的 x 能看成 y 的函数吗? 为什么?

在表达式 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$ 中, 因为

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right]^x,$$

所以这个函数可以看成是一个指数函数, 根据指数函数的性质可知, 这个函数是一个减函数. 这也就意味着, 给定一个 y 值, 只有唯一的 x 值与它对应, 也就是说, 如果把 y 看成自变量, x 看成因变量, 那么这里的 x 可以看成 y 的函数. 事实上, 利用指数运算和对数运算的关系, 可以把上述关系式改写为

$$x = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}} y,$$

如果仍用 x 表示自变量, y 表示因变量, 那么这一函数关系可以表示为

$$y = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}} x,$$

其中自变量在真数的位置上, 我们称这样的函数为对数函数.

1. 对数函数

一般地, 函数

$$y = \log_a x$$

称为对数函数, 其中 a 是常数, $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ①.

下面我们来研究对数函数的性质与图像.

作为例子, 首先分析对数函数 $y = \log_2 x$ 的性质, 并得出其对应的图像.

尝试与发现

(1) 对数函数 $y = \log_2 x$ 中, x 的值可以是 -1 吗? 可以是 0 吗? 为什么?

(2) 分别求出对数函数 $y = \log_2 x$ 在自变量取 $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$ 时所对应的函数值 (填写下表), 并由此猜测对数函数 $y = \log_2 x$ 的定义域、值域、奇偶性、单调性, 尝试说明理由.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$							

可以看出, $y = \log_2 x$ 中, x 不能是 -1 , 也不能是 0 .

事实上, 根据对数运算的定义和性质, 我们可以得到对数函数 $y = \log_2 x$ 的性质:

- (1) 定义域是 **1** _____;
- (2) 值域是 **2** _____;
- (3) 奇偶性是 **3** _____;
- (4) 单调性是 **4** _____.

根据以上信息可知, 函数 $y = \log_2 x$ 的图像都在 y 轴右侧, 而且从左往右图像是逐渐上升的. 通过描点, 可以作出函数 $y = \log_2 x$ 的图像, 如图 4-2-3 所示.

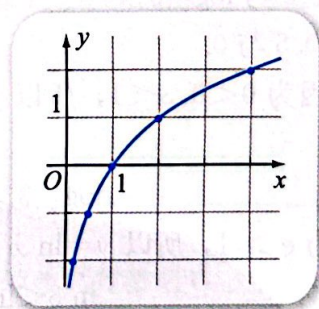


图 4-2-3

下面我们来研究对数函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的性质与图像.

注意到

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x,$$

因此不难看出 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y = \log_2 x$ 之间的联系: 当这两个函数的自变量相

① 以下谈到对数函数 $y = \log_a x$ 时, 均默认为 a 是常数, $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

等时, 对应的函数值互为相反数. 也就是说, 如果点 (x_0, y_0) 在 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像上, 那么这个点关于 x 轴的对称点 $(x_0, -y_0)$ 一定在 $y = \log_2 x$ 的图像上; 反之, $y = \log_2 x$ 的图像上任意一点 (x_0, y_0) , 其关于 x 轴的对称点 $(x_0, -y_0)$ 也一定在 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像上. 因此, 对数函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y = \log_2 x$ 的图像关于 x 轴对称, 如图 4-2-4 所示.

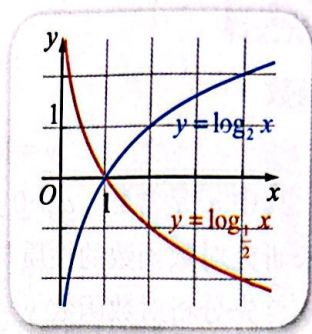


图 4-2-4

尝试与发现

- (1) 你能指出对数函数 $y = \log_2 x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像的公共点吗?
- (2) 你能得出对数函数 $y = \log_a x$ 一定过哪个定点吗?

函数 $y = \log_2 x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像的公共点为 $(1, 0)$. 事实上, 因为 $\log_a 1 = 0$, 所以 $y = \log_a x$ 的图像一定过点 $(1, 0)$.

由以上实例, 可以归纳出对数函数 $y = \log_a x$ 具有下列性质:

- (1) 定义域是 $(0, +\infty)$, 因此函数图像一定在 y 轴的右边.
- (2) 值域是实数集 $\mathbf{R}$.
- (3) 函数图像一定过点 $(1, 0)$.
- (4) 当 $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 是增函数; 当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 是减函数.

例 1 比较下列各题中两个值的大小:

- (1) $\log_{0.3} 3$ 与 $\log_{0.3} 5$; (2) $\ln 3$ 与 $\ln 3.001$;
- (3) $\log_7 0.5$ 与 0 .

解 (1) 因为 $0 < 0.3 < 1$, 所以 $y = \log_{0.3} x$ 是减函数, 又因为 $3 < 5$, 所以

$$\log_{0.3} 3 > \log_{0.3} 5.$$

(2) 因为 $e > 1$, 所以 $y = \ln x$ 是增函数, 又因为 $3.001 > 3$, 所以

$$\ln 3 < \ln 3.001.$$

(3) 因为 $7 > 1$, 所以 $y = \log_7 x$ 是增函数, 又因为 $\log_7 1 = 0$, 而且 $0.5 < 1$, 所以

$$\log_7 0.5 < \log_7 1 = 0.$$

例 2 已知 $\log_{0.7} (2m) < \log_{0.7} (m-1)$, 求 m 的取值范围.

解 因为 $y = \log_{0.7} x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 而且是减函数, 所以由已知有 $2m > m-1 > 0$, 即

$$\begin{cases} 2m > m-1, \\ m-1 > 0. \end{cases}$$